UE4 : SÉANCE TUTORAT N°1

TUTORAT des ÉTUDIANTS de santé de DIJON

ETUDE DE FONCTIONS

Sens de variation, extremums, asymptotes, limites…

Sens de variation

Sens de variation :

Pour déterminer le sens de variation d'une fonction on calcule sa **dérivée première**.

$f'(x) > 0$ → la fonction est croissante

$f'(x) < 0$ → la fonction est décroissante

$f'(x) = 0$ → tangente horizontale à la courbe

Concavité de la courbe

Concavité :

Pour déterminer la concavité de la courbe d'une fonction on calcule sa **dérivée seconde**.

$f''(x) > 0$ → concavité tournée vers le haut ☺, courbe au-dessus de ses tangentes

$f''(x) < 0$ → concavité tournée vers le bas ☹, courbe en-dessous de ses tangentes

$f''(x) = 0$ avec changement de signe de part et d'autre de x

→ point d'inflexion

Extremum

Pour que la courbe d'une fonction présente un extremum, il faut que **f'(x) = 0** et on étudie le **signe de la dérivée seconde**.

Si f'(x) = 0 et f''(x) > alors il y a un **minimum**

Si f'(x) = 0 et f''(x) < alors il y a un **maximum**

Limites de fonctions

- En connaissant le tableau du cours, on peut toujours calculer la limite d'une fonction, sauf lorsqu'on est en présence d'une des 4 formes indéterminées :

$$\infty - \infty \qquad 0 \times \infty \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

- Il y a deux méthodes pour lever l'indétermination :
    - Croissance comparée de fonctions
    - Règle de l'Hospital

Limites de fonctions

Croissance comparée de fonctions :

Quand x tend vers l’infini, on a e^x >> x^a >> $\ln x$ (avec a>0)

On dit que l’exponentielle est toujours supérieure au logarithme népérien.

Limites de fonctions

Règle de l'Hospital :

Si, quand x tend vers a ou l'infini, f(x) et g(x) tendent vers 0 ou ∞,

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \text{ alors } \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

On dérive séparément le numérateur et le dénominateur jusqu'à la levée de l'indétermination seulement, et on calcule la limite de cette nouvelle fonction.

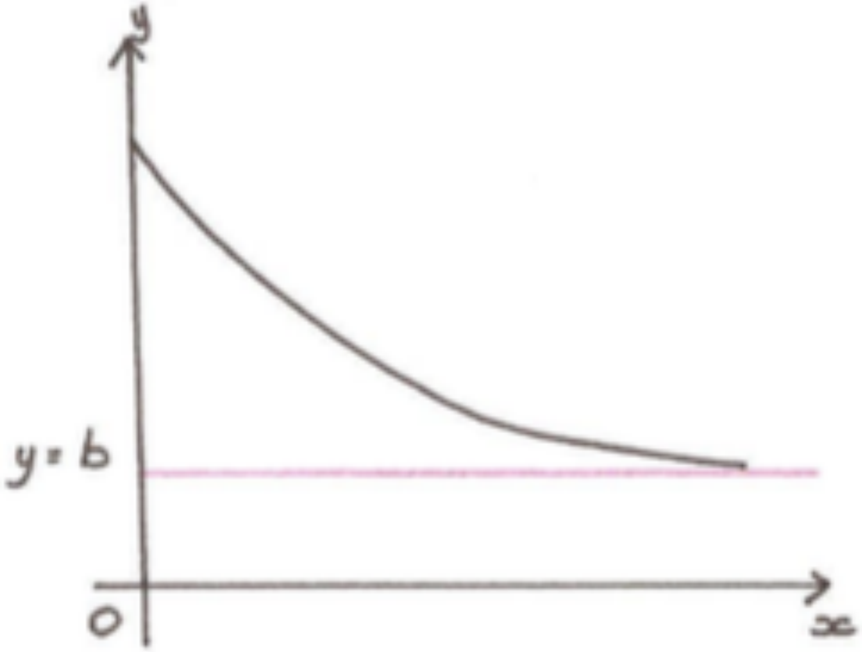
Asymptotes et Branches Paraboliques

X tend vers	Y = f(x) tend vers	y/x tend vers	Y – ax tend vers	Résultat
a	∞	-	-	Asymptote verticale x = a
∞	b	-	-	Asymptote horizontale y = b
∞	∞	∞	-	Branche parabolique dans la direction Oy
∞	∞	0	-	Branche parabolique dans la direction Ox
∞	∞	a	b	Asymptote oblique Y = ax + b
∞	∞	a	∞	Branche parabolique dans la direction ax

Pour différencier une branche parabolique d’une asymptote, on dit que la courbe se rapproche de l’asymptote et s’éloigne de la branche parabolique.

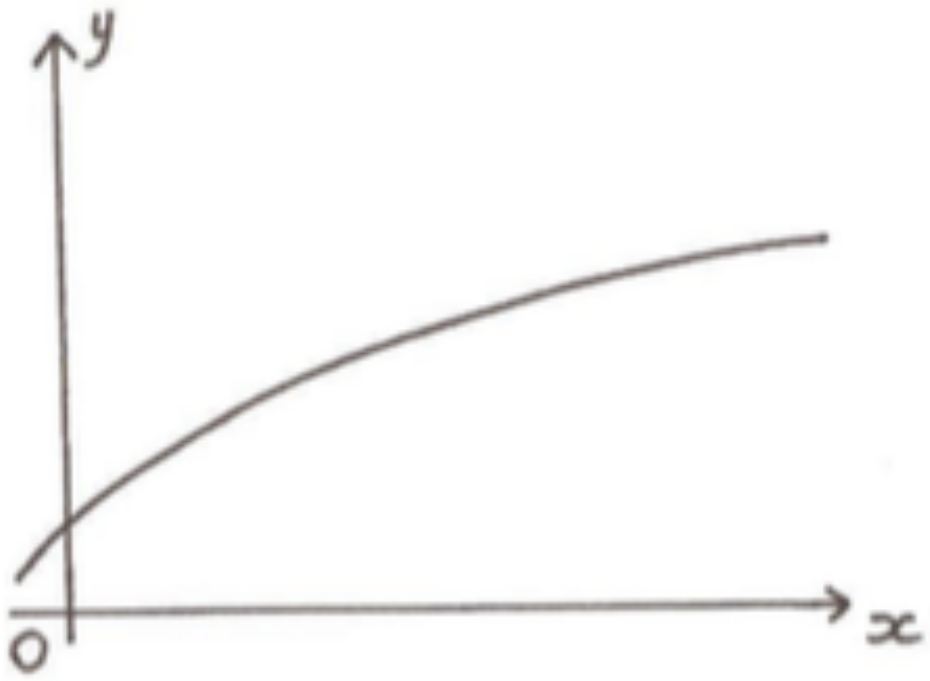
Asymptotes verticales et horizontales

Asymptote verticale

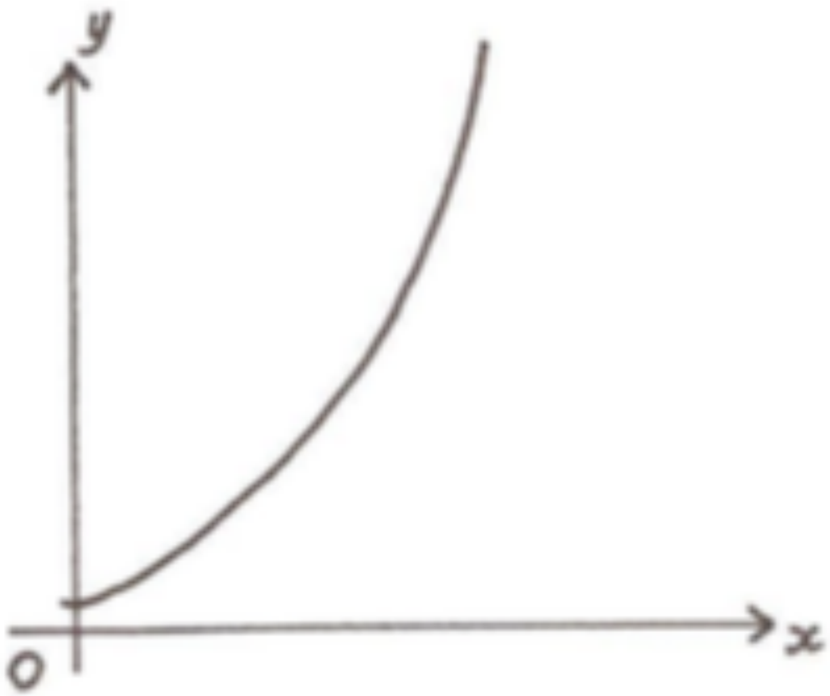


Asymptote horizontale

Branches Paraboliques

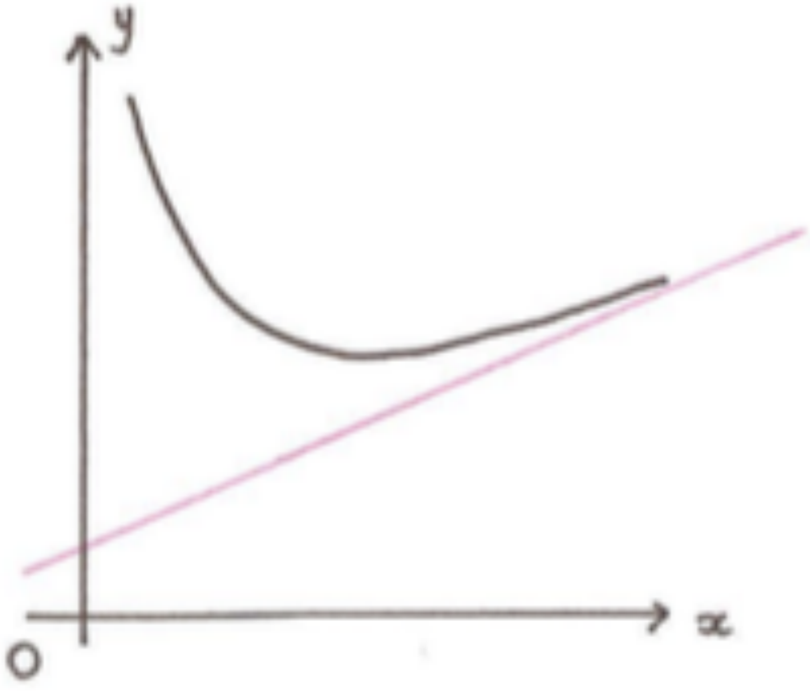


BP en direction de Ox

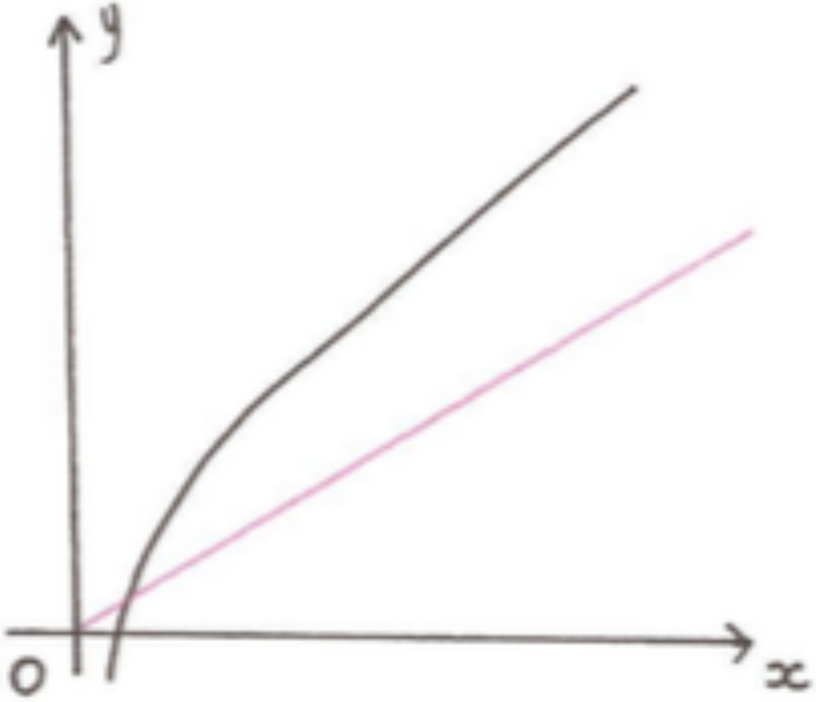


BP en direction de Oy

Asymptote oblique et BP en direction de ax



Asymptote oblique



BP en direction de ax

Exemple sur l'étude de fonctions

QCM : On étudie la fonction $8x^2 + 5x$

A. La fonction est croissante sur son domaine de définition
B. La courbe représentative de la fonction est tournée vers le haut
C. La courbe présente une tangente horizontale pour $x = \frac{5}{16}$
D. La limite de cette fonction en $+\infty$ est $+\infty$
E. La courbe est en-dessous de ses tangentes

Correction QCM

A. Faux. La dérivée première est 16x + 5
La fonction est décroissante pour $x < \frac{-5}{16}$ et la fonction est croissante pour $x > \frac{-5}{16}$.

B. Vrai. La dérivée seconde est 16, donc > 0, la courbe est tournée vers le haut, donc au-dessus de ses tangentes.

C. Faux. La courbe présente une tangente horizontale quand f’(x) = 0, f’(x) = 0 pour $x = \frac{-5}{16}$.

D. Vrai. Quand x tend vers ∞ la fonction tend vers +∞ car $8x^2$ tend vers +∞ et 5x tend vers +∞ .

E. Faux. Voir B.

LINEARISATION

Sous la forme $aX + b$

	Linéarisation	Papier
y = ax^n+ b	X = x^n Y = f(x)	Papier millimétré
y = $\frac{x}{x+b}$	X = $\frac{1}{x}$ Y = $\frac{1}{y}$	Papier millimétré
y = $\ln(x)$	y = ln (x) X = ln (x) Y = X	Papier millimétré Papier semi-logarithme
y = Ce^{kx} => Croissance exponentielle	Y = ln(y) = ln (C) + kx X = x	Papier millimétré

	Linéarisation	Papier
y = Ce^{-kx} => Décroissance exponentielle	Y = ln C – kx X = x	Papier millimétré
y = F(1-e^{-kx}) $= F - Fe^{-kx}$ => Exponentielle ascendante	Y = ln(F-y) = ln F – kx X = x	Papier millimétré
y = A$e^{-ax} - Be^{-bx}$ => Différence de 2 exponentielles décroissantes	Pas abordé en cours	Papier millimétré
y = A$e^{-ax} + Be^{-bx}$ => Somme de 2 exponentielles décroissantes	Pas abordé en cours	Papier millimétré

Exemples sur la linéarisation

QCM 1 :

On peut linéariser, sur papier millimétré, la fonction y = $\frac{1}{ae^{x}}$ (a et b constantes > 0) :

A. y = f(ln(x))

B. ln(y) = f(ln(x))

C. ln(y) = f(x)

D. 1/y = f(x)

E. On ne peut pas linéariser cette fonction

<u>QCM 2</u> :

Soit la fonction $2e^{0,1t}$, on peut la linéariser telle que :

A. y = f(t) sur PM

B. ln y = f(t) sur PM

C. ln y = f(t) sur papier semi-logarithme

D. y = f(t) sur semi-logarithme

E. La fonction n’est pas linéarisable

<u>Correction QCM 1</u> : C

y = $\frac{1}{a}e^{-bx}$ (fonction exponentielle décroissante)

ln(y) = ln($\frac{1}{a}$) $-bx$

Donc sur PM : Y = ln(y) = f(x)

<u>Correction QCM 2</u> : BD

Incertitudes de mesures

Les bases….

- Deux types de mesurages: directs et indirects (dans le cas d’un mesurage indirects, il y a toujours plusieurs variables).

- Deux types d’incertitudes:
  - Δu: l’incertitude absolue: elle permet d’encadrer la mesure et a la même unité que la mesure
  - $\frac{\Delta u}{u}$: l’incertitude relative: n’a pas d’unité (elle est souvent exprimée en %)

-Différentes façons d’exprimer le résultats de la mesure… (attention aux chiffres significatifs)

Mais comment trouver Δu?

Mais comment trouver Δu?

Deux méthodes:

- la méthode de la différentielle totale (toujours utilisable); permet de trouver directement Δu.

-la méthode de la différentielle logarithmique (utilisable uniquement dans certains cas); permet de trouver directement $\frac{\Delta u}{u}$

Méthode de la différentielle totale

On dérive la fonction en fonction de chaque variable (c'est-à-dire en considérant que toutes les autres sont des constantes).

Par exemple pour la fonction: u=$x^2 + yz$

- On dérive en fonction de x: $\frac{\delta u}{\delta x} = 2x$
- On dérive en fonction de y: $\frac{\delta u}{dy} = z$
- On dérive en fonction de z: $\frac{\delta u}{\delta z} = y$

En faisant la somme des différentielles partielles, on obtient: du $= (2x)dx + (z)dy + (y)dz$

Puis on majore… et on obtient Δu=$|2x|\Delta x + |z|\Delta y + |y|\Delta z$

Méthode de la différentielle logarithmique

On passe d'abord par le logarithme de la fonction

Par exemple pour la fonction u=$\frac{x^2}{yz}$

$\ln u = 2lnx - lny - lnz$ d'où en calculant la différentielle, $\frac{du}{u} = \left(\frac{2}{x}\right) dx + \left(\frac{-1}{y}\right) dy + \left(\frac{-1}{z}\right) dz$

On majore… $\frac{\Delta u}{u} = \left|\frac{2}{x}\right| \Delta x + \left|\frac{-1}{y}\right| \Delta y + \left|\frac{-1}{z}\right| \Delta z$

Enfin, il ne nous reste plus qu'à multiplier par u pour obtenir Δu.

Rassurez-vous

x, y, z, Δx, Δy, Δz … vous seront toujours donné dans l’énoncé

Par contre u ne l’est pas; c’est à vous de le calculer…

Bon courage pour la colle…